

ce ajla

Ex: show that

$$1) 2 \bar{J}_n' = \bar{J}_{n-1} - \bar{J}_{n+1}$$

$$2) \frac{2n}{x} \bar{J}_n = \bar{J}_{n+1} + \bar{J}_{n-1}$$

solution

Notes

$$a) \frac{d}{dx} [x^n \bar{J}_n] = x^n \bar{J}_{n-1}$$

$$b) \frac{d}{dx} (x^{-n} \bar{J}_n) = -x^{-n} \bar{J}_{n+1}$$

~~Proof~~ For a

$$x^n \bar{J}_n' + n x^{n-1} \bar{J}_n = x^n \bar{J}_{n-1}$$

بالقسمة على x^{n-1}

$$\Rightarrow x \bar{J}_n' + n \bar{J}_n = x \bar{J}_{n-1} \rightarrow C$$

for b

$$x^{-n} \bar{J}_n - n x^{-n-1} \bar{J}_n = -x^{-n} \bar{J}_{n+1}$$

بالقسمة على
 x^{-n-1}

$$x \bar{J}_n - n \bar{J}_n = -x \bar{J}_{n+1} \rightarrow d$$

بشرح die

$$2n \bar{J}_n = +x \bar{J}_{n+1} + x \bar{J}_{n-1}$$

$$\boxed{\frac{2n}{x} \bar{J}_n = \bar{J}_{n+1} + \bar{J}_{n-1}} \neq \text{for } [2]$$

بجمع c < d

$$2x \bar{J}_n = -x \bar{J}_{n+1} + x \bar{J}_{n-1}$$

على (x)

$$\boxed{2 \bar{J}_n = \bar{J}_{n-1} - \bar{J}_{n+1}} \neq \text{for } (1)$$

أفكار التحويل والتكبير لدالة Bessel :-

→ إذا كان المطلوب تحويل الرقم أسفل \bar{J} نستخدم

$$\boxed{\bar{J}_{n+1} = \frac{2n}{x} \bar{J}_n - \bar{J}_{n-1}}$$

\bar{J}_{n-1}

لذا كان المطلوب تكبير الرقم أسفل J لنستخدم

$$J_{n-1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n+1}$$

Ex: Express $J_{3/2}$, $J_{-3/2}$ in terms of $\sin x$, $\cos x$.

Sol

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_{\frac{3}{2}} ??$$

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1} \quad \rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$J_{\frac{3}{2}} = \frac{2(\frac{1}{2})}{x} J_{\frac{1}{2}} - J_{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$\rightarrow J_{-\frac{3}{2}} ?? \Rightarrow J_{n-1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n+1}$$

$$J_{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{x} J_{-\frac{1}{2}} - J_{\frac{1}{2}}$$

$$J_{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{-1}{x} \cos x - \sin x \right]$$

Home work

① Find $J_{-\frac{5}{2}}$, $J_{\frac{5}{2}}$ in terms of $\sin x$, $\cos x$.

② Find $J_{-\frac{7}{2}}$, $J_{\frac{7}{2}}$ " " " " " "

أفكار التكامل

$$* \frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1} \rightarrow (1)$$

$$* \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n+1} \rightarrow (2)$$

← عندما يوجد داخل التكامل " x مرفوعة في J_n " إذا كان

أول x موجب ~~و~~ ما تعد J
 ~~سابقة~~

$$\int x^m J_n$$

$$\int x^{m-n-1} (x^{n+1} J_n)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} (x^{n+1} J_{n+1})$$

و تكامل بالتجزئ

→ اذا كان x سابقه ماتحت τ باكثر من رقم
 فآخذ من x " x " ما يضبط قانونه رقم (1) بحيث يذ
 ما فومر x سابقه ماتحت τ بـ 1 وذلك بالتحري.

Ex: Evaluate

$$1) \int x^4 \bar{J}_1 dx$$

$$2) \int_0^1 x^3 J_0 dx = 2 J_0(1) - 3 J_1(1)$$

$$3) \int \overline{\sigma}_5 \, dx$$

Sol

$$b) \int x^4 J_1 dx = \int x^2 * x^2 J_1 dx = I$$

$$u = x^2$$

$$dv = x^2 \bar{J}_1 dx = \frac{d}{dx} (x^2 \bar{J}_2) dx$$

$$du = 2x dx \quad \xleftrightarrow{-} \quad V = x^2 \bar{J}_2$$

$$I = x^4 \bar{J}_2 - 2 \int \underbrace{x^3 \bar{J}_2}_{\rightarrow \frac{d}{dx}(x^3 \bar{J}_3)} dx$$

$$\bar{I} = x^4 \bar{J}_2 - 2x^3 \bar{J}_3 + c$$

$$2) \quad I = \int_0^1 x^3 J_0 \, dx = \int_0^1 x^2 \cdot x J_0 \, dx$$

$$u = x^2$$

$$dv = x J_0 \, dx = \frac{d}{dx} (x J_1) \, dx$$

$$du = 2x \, dx$$

$$v = x J_1$$

$$I = x^3 J_1 \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x^2 J_1 \, dx$$

$$I = J_1(1) - 2 \left(x^2 J_2(x) \right) \Big|_0^1$$

$$= J_1(1) - 2 J_2(1)$$

نجعل J_2 بدلالة J_1

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1}$$

$$\underline{n=1} \rightarrow J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$$

$$J_2(1) = 2 J_1(1) - J_0(1)$$

بالتعويض

$$I = J_1(1) - 4 J_1(1) + 2 J_0(1)$$

$$I = 2 J_0(1) - 3 J_1(1) \neq$$

③ $I = \int J_5 dx$

مے فیہ طریقہ نہ ہوتا ہے لیکن اس طریقہ سے $\int x^{-6} x^6 J_5$ اور $\int x^{-4} x^4 J_5$ دی آسٹھ قلیلًا حل ہوا فی البیت۔

Ex: Prove that

① $\cos(x \sin x) = J_0 + 2J_2 \cos(2\theta) + 2J_4 \cos(4\theta) \dots$

② $\sin(x \sin \theta) = 2J_1(x) \sin \theta + 2J_3(x) \sin(3\theta) \dots$

③ $J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1$

④ $2 \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1) J_{2n+1}(x) = x$

* use generating function

Sol

$$e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

← من قُطْعَةٍ (exp.) 11 $\sin \cos$ 131

$$t = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin \theta$$

$$\frac{1}{t} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$t - \frac{1}{t} = 2i \sin \theta$$

$$\text{L.H.S} = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = e^{\frac{x}{2}(2i \sin \theta)} = e^{ix \sin \theta}$$

$$= \cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta) \rightarrow (1)$$

$$\text{R.H.S} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos(n\theta) + i \sum_{-\infty}^{\infty} J_n \sin(n\theta) \rightarrow (2)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos(n\theta) = \dots \dots J_{-2} \cos(-2\theta) + J_{-1} \cos(-\theta)$$

$$+ J_0(x) + J_1(x) \cos(\theta) + J_2 \cos(2\theta) \dots$$

$$\Rightarrow J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \Rightarrow J_{-1} = -J_1$$

$$J_{-2} = J_2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_n(x) \cos(n\theta) = \bar{J}_0 + 2\bar{J}_2 \cos(2\theta) + 2\bar{J}_4 \cos(4\theta) + \dots$$

$$= \bar{J}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{J}_{2n} \cos(2n\theta) \rightarrow (3)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_n \sin(n\theta) = \dots + \bar{J}_{-2} \sin(-2\theta) + \bar{J}_{-1} \sin(-\theta) + \bar{J}_0(0) + \bar{J}_1 \sin(\theta) + \bar{J}_2 \sin(2\theta) \dots$$

(sin) تعكس الإشارة ومع الإشارة سالبة مقلوب \bar{J} تجعل الفردى يتبقى.

$$\begin{aligned} \bar{J}_{-2} \sin(-2\theta) &= (-1)^2 \bar{J}_2 * -\sin 2\theta \\ &= -\bar{J}_2 \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\bar{J}_{-1} \sin(-\theta) = -1 * \bar{J}_1 * -\sin(\theta) = \bar{J}_1 \sin \theta$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{J}_n \sin(n\theta) = 2\bar{J}_1 \sin(\theta) + 2\bar{J}_3 \sin(3\theta) \dots$$

$$= 2 \sum \bar{J}_{2n+1} \sin(2n+1)\theta \rightarrow (4)$$

بالقوة يفيد n في e

$$R.H.S = J_0 + 2 \sum J_{2n} \cos(2n\theta) + i 2 \sum J_{2n+1} \sin(2n+1)\theta \rightarrow (5)$$

نفس الشيء الحقيقي ~~بالقوة~~ بالحقبة والتخيل بالتخيل $n < 1$

$$\therefore \cos(x \sin \theta) = J_0 + 2 \sum J_{2n} \cos(2n\theta) \rightarrow (6)$$

$$\therefore \sin(x \sin \theta) = 2 \sum J_{2n+1} \sin(2n+1)\theta \rightarrow (7)$$

Let $\theta = 0$ in 6

$$\therefore 1 = J_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \quad \neq$$

إذا كان المطلوب معامل الزاوية مفرد، نفاضل حتى يخرج خارج النسبة، وإذا كان المطلوب معامل الزاوية مقسوم النسبة

نكامل حتى يخرج تحت x ثم نفكر نضع قيمة ل θ في المسألة.

نفاذ رقم (7) —

$$\cos(x \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \cos(2n+1)\theta$$

at $\theta=0$

$$x(1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)$$

Ex use generating fn

$$e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

to show that

$$(1) J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

$$(2) \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \leftarrow \text{Lipshitz integral}$$

(Lipshitz integral)

نفاذ

$$t = e^{i\theta}, \quad \frac{1}{t} = e^{-i\theta}, \quad \left(t - \frac{1}{t}\right) = 2i \sin \theta$$

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} \rightarrow (1)$$

← بفرض (1) $e^{-im\theta}$ والتي تكمل من $-\pi$ إلى π

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \left[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right] ; m \neq n$$

$$= \frac{1}{i(n-m)} \left[\cos(n-m)\pi + i \sin(n-m)\pi \right.$$

$$\left. - \cos(n-m)\pi + \sin(n-m)\pi \right]$$

$$\sin(\text{عدد زوج})\pi = 0 \quad ; \quad \cos(\text{عدد زوج})\pi = (-1)$$

$$\therefore I = 0 \quad ; \quad m \neq n$$

□□□□□

at $n = m$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i n \theta} d\theta = \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$I = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

← لأن n يمد من $-\infty$ لـ $+\infty$ ، m عدد صحيح موجب
 تمر n على جميع الأنواع ومنه فإنها m ناتج التكامل
 عند جميع الأرقام يساوي صفر ما عدا عند " $m=n$ "
 أي أنه لا يوجد متسلسلة والمرتبة الأولى يساوي حد واحد

$m = n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta = 2\pi J_n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = 2\pi J_n$$

فشارى الحقيقى

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

↘ دالة زوجية

$$J_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

For (2)

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-ax} \left(\int_0^{\pi} \cos(bx \sin \theta) d\theta \right) dx$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx \sin \theta) dx \right) d\theta$$

Remark $\int_0^{\pi} \text{even harmonic} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$L[\cos(\omega x)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(\omega t) dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\omega = b \sin \theta \quad | \quad s = a$$

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{a^2 + b^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

بالقسمة على $\cos^2 \theta$ بسيط، نحصل

$$I = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{a^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) + b^2 \tan^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{a \sec^2 \theta + b^2 \tan^2 \theta} d\theta$$

$$z = \tan \theta \Rightarrow dz = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\text{at } \theta = 0 \rightarrow z = 0, \quad \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\text{at } \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = \infty$$

$$I = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{a^2 (1+z^2) + b^2 z^2}$$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\frac{2}{a} + (a^2 + b^2) z^2} = \frac{\frac{2a}{\pi}}{a^2 + b^2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{a}{a+b} \right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \times \frac{\frac{2a}{\pi}}{(a^2 + b^2)} \tan^{-1} \frac{z(b+a)}{a} \Big|_0^{\infty}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$= \frac{2}{\pi (\sqrt{a^2 + b^2})} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

16 Lec 24